

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВЕ ДОСТИЖИМОСТИ ¹

© А. Я. Нарманов, А. С. Шарипов

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in U \subset R^m, \quad (1)$$

где U — компактное подмножество R^m . Предполагается, что при каждом $u \in U$ векторное поле $f(x, u)$ дифференцируемым класса C^∞ , а отображение f является непрерывным по совокупности переменных.

Мы будем говорить, что точка x^* достижима из точки η за время T , если существует измеримая вектор функция $u : [0; T] \rightarrow U$ такая, что задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad (2)$$

с начальным условием $x(0) = \eta$ имеет решение, определенное на отрезке $[0; T]$ и удовлетворяющее условию $x(T) = x^*$. В этом случае пишем $\eta \overset{T}{\rightarrow} x^*$. Множество точек R^n , достижимых из η за время T , обозначим через $G_\eta(T)$, то есть $G_\eta(T) = \{x \in R^n : \eta \overset{T}{\rightarrow} x\}$, а через $G_\eta(\leq T)$ обозначим множество точек R^n , достижимых из η за время не более чем T , то есть $G_\eta(\leq T) = \{x \in R^n : \eta \overset{\tau}{\rightarrow} x, \tau \leq T\}$. По определению полагаем, что $\eta \in G_\eta(T)$ для всех T .

Изучение свойств множеств достижимости $G_\eta(\leq T)$ и $G_\eta(T)$ является важным вопросом в качественной теории оптимального управления. Например, замкнутость (компактность) множества $G_\eta(\leq T)$ является основным фактором в доказательстве теорем существования оптимального управления в том или ином смысле. В общем случае конечно же, множества $G_\eta(\leq T)$ и $G_\eta(T)$ не обязаны быть замкнутыми (см. примеры в [1], [2, с. 268]).

Предположим, что правая часть системы (1) удовлетворяет условию

$$|f(x, u)| \leq M |x| + N, \quad \forall (x, u) \in R^n \times U, \quad (3)$$

где M и N — постоянные величины.

П р е д л о ж е н и е. Множества $\overline{G}_\eta(\leq T)$ и $\overline{G}_\eta(T)$ являются компактными.

Т е о р е м а 1. Отображения $T \rightarrow \overline{G}_\eta(\leq T)$ и $T \rightarrow \overline{G}_\eta(T)$ являются непрерывными при каждом $T \geq 0$.

Т е о р е м а 2. Пусть для любого $T \geq 0$ множества $G_\eta(T)$ компактны. Тогда множества $G_\eta(\leq T)$ также компактны.

Пусть на R^n задано семейство векторных полей вида

$$X_u(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i(t) \quad (4)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта № 1Ф1.1.9 при ГКНТ РУз.

где $|u_i(t)| \leq 1$ для всех $x \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\dots$, $f_m(x)$ — гладкие вектор функции с ограничениями $|f_i(x)| \leq M_i$ для всех $x \in R^n$, M_i — постоянные величины. Векторным полям (4) соответствует система управления следующего вида:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i(t) \quad (5)$$

Т е о р е м а 3. Множество $G_\eta(T)$ для системы (5) является компактным множеством для всех $T \geq 0$.

С л е д с т в и е. По теореме 2 для каждого T множество $G_\eta(\leq T)$ для системы (5) является компактным множеством.

Теперь рассмотрим линейную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in R^n, u \in R^m, \quad (6)$$

где A — матрица размерности $n \times n$, B — матрица размерности $n \times m$. Допустимыми управлениями являются измеримые ограниченные функции.

Обозначим через V множество аналитических векторных полей, определенных на R^n . Известно, что множество V является алгеброй Ли, в которой произведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X, Y]$. Положим $X_u(x) = Ax + Bu$ и обозначим через D множество векторных полей $\{X_u : u \in R^m\}$, а через $A(D)$ минимального подалгебру Ли, содержащую D . Орбита $L(x)$ системы (5), проходящая через точку x , определяется как множество всех точек y из R^n вида

$$y = X_l^{t_l} \left(X_{l-1}^{t_{l-1}} \left(\dots \left(X_1^{t_1}(x) \right) \dots \right) \right), \quad (7)$$

где $X_i \in D$, t_i — действительные числа, $i = 1, 2, \dots, l$, $t \rightarrow X^t(x)$ — интегральная кривая векторного поля $X \in D$, проходящая через точку x при $t = 0$.

Если в (7) t_i — положительные числа, то $L(x)$ совпадает положительной орбитой. Если допустимые управления — кусочно-постоянные функции, то G_η также является положительной орбитой и поэтому $G_\eta \subset L(\eta)$ для всех $\eta \in R^n$.

Если $x(t)$ — траектория системы (6) с начальным условием $x(0) = x_0$, определяемая допустимым управлением $u = u(t)$ (ограниченная измеримая функция), то в работе [3] показано, что $G_\eta \subset L(\eta)$. Ниже показано, что для системы (6) G_η совпадает с $L(\eta)$.

Пусть $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ для всех $x \in R^n$. Тогда, в силу того, что $A(D)$ — алгебра Ли, множество векторов $A_x(D)$ является линейным подпространством пространства векторов в точке x . В частности, $X_u(x) \in A_x(D)$ при каждом $u \in R^m$ и для всех $x \in R^n$. Ясно, что $0 \leq \dim A_x(D) \leq n$ для всех $x \in R^n$.

Т е о р е м а 4. Пусть $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in R^n$, где $0 < k < n$. Тогда для всех $\eta \in R^n$ множества G_η являются k -мерной плоскостью.

С л е д с т в и е. $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \leq \dim A_x(D)$ для всех $x \in R^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Н.Н. О корректности задачи на быстродействие // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 11. С. 1974–1980.
2. Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

3. Аграчёв А.А., Вахрамеев С.А., Гамкрелидзе Р.В. Проблемы геометрии. Т. 14. // Итоги науки и техники. ВИНТИ. М., 1983. С. 3–56.

Нарманов Абдигалпар Якубович
Национальный университет Узбекистана
Узбекистан, Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru

Шарипов Анваржон Солиевич
Национальный университет Узбекистана
Узбекистан, Ташкент
e-mail: asharipov@inbox.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

МЕТОД ПРИРАВНИВАНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

© Г. Насритдинов

В макроэкономических исследованиях часто приходится решать оптимизационные задачи. Целый ряд таких задач формулируется с привлечением производственных функций (ПФ). Таковыми являются задачи максимизации прибыли, минимизации общих затрат, максимизации объема выпуска и др. Имеются классические методы решения упомянутых задач, они связаны с определенными трудностями практического характера. Если функции, участвующие в постановке оптимизационных задач, имеют определенными свойствами, то можно предложить более рациональный способ решения задач. Этот метод назовем методом приравнивания угловых коэффициентов и изложим его для задачи максимизации объема выпуска при заданном бюджетном ограничении

$$\begin{cases} F(L, K) \rightarrow \max, \\ Q(L, K) = I, \end{cases} \quad (1)$$

где $F(L, K)$ — неоклассическая ПФ, $Q(L, K)$ — вообще говоря, нелинейная функция, I — заданное положительное число, выражающее бюджетное ограничение. Напомним неоклассические условия для $F(L, K)$:

$$\begin{aligned} F(L, K) &\in C^2(R_t^2), F(0, K) = F(L, 0) = 0; \quad F(0, 0) = 0; \\ F(\lambda L, \lambda K) &\equiv \lambda F(L, K), \lambda > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \\ \frac{\partial F}{\partial K} &> 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} \geq 0 \quad \forall (L, K) \in R_+^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть функция $Q(L, K)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(L, K) > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} \leq 0 \quad \forall (L, K) \in R_+^2$$

О п р е д е л е н и е . Если для $(L_0, K_0) \in R_+^2$ имеют место равенство

$$Q(L_0, K_0) = I$$